Claudia Temneanu

Adrian Alba

Matematică

BACALAUREAT – TESTE

M2 Științe ale naturii

– ediție revizuită –

Booklet

București, 2024

Cuprins

Cuprins

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică ***M_șt-nat***

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
• **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
• **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 4$ și $a_2 = 7$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 1 = 0$. Arătați că $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} = \frac{1}{8}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ și $C(3, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$ și $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y) = xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(27)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 1$, arătați că $f(1) = 0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X + 2$, atunci restul împărțirii lui f la $X + 3$ este egal cu -1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + 2017}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{-(x + 2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \frac{4}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f, știind că $F(1) = \frac{\pi}{4} + 1$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n xf(x)dx = \frac{1}{2}\ln 5$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r = a_2 - a_1 = 3$ $a_3 = 10$	**3p** **2p**
2.	$x_1 + x_2 = 4,\ x_1x_2 = 1$ $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 4 \cdot 1 - 4 = 0$	**2p** **3p**
3.	$2^{2x+1} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2x + 1 = -3$ $x = -2$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii de 15 sunt numerele 15, 30, 45, 60, 75 și 90, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_{AB} = 0,\ m_{AC} = \frac{a-1}{3}$ $m_{AB} = m_{AC} \Leftrightarrow \frac{a-1}{3} = 0 \Leftrightarrow a = 1$	**2p** **3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}} =$ $= \frac{1}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 - 1 = -1$	**2p** **3p**
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} =$ $= xy\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xyI_2$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**

c)	$A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(3^{3a+3})$ $A(3^{3a+3}) = A(27) \Rightarrow 3^{3a+3} = 3^3$, de unde obținem $a = 0$	3p 2p
2.a)	$f = X^3 + X^2 + 2X - 4 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1^2 + 2\cdot 1 - 4 =$ $= 1 + 1 + 2 - 4 = 0$	3p 2p
b)	$f(-2) = 0 \Rightarrow m = 4$, deci $f = X^3 + 4X^2 + 2X - 4$ $f(-3) = -27 + 36 - 6 - 4 = -1$	3p 2p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2,\ x_1x_2x_3 = 4$ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} + (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{2} - m$, deci $m = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(x+2017)'e^x - (x+2017)(e^x)'}{(e^x)^2} =$ $= \frac{e^x(1 - x - 2017)}{(e^x)^2} = \frac{-(x+2016)}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(0) = 2017,\ f'(0) = -2016$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -2016x + 2017$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{x + 2015}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$ $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [-2015, +\infty)$, deci f este convexă pe $[-2015, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big\|_0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$	3p 2p
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \operatorname{arctg} x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $F(1) = \frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = 1$, deci $F(x) = \operatorname{arctg} x + 1$	2p 3p
c)	$\int_0^n xf(x)dx = \int_0^n \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\|_0^n = \frac{1}{2}\ln(n^2+1)$ $\frac{1}{2}\ln(n^2+1) = \frac{1}{2}\ln 5$, deci $n^2 + 1 = 5$, de unde obținem $n = 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 4$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$ și $g(x) = 2018 - x$. Calculați $g(f(1))$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x = 5^{x^2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x - a^2y - a^2 = 0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
5p	**6.** Arătați că $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{5}{2}$, știind că $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1)) = -7$.
5p	**b)** Demonstrați că $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1) + A(a))A(0) = (a^2+7)I_2$.
	2. Se consideră polinomul $f = 4X^3 - 6X + m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 0$.
5p	**b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f nu se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$.
5p	**c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
	2. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx = 22$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_1 b_3 = b_2^2$ $b_1 b_2 b_3 = b_2^3 = 4^3 = 64$	**2p** **3p**
2.	$f(1) = 0$ $g(f(1)) = g(0) = 2018$	**2p** **3p**
3.	$5^{2x} = 5^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ sau $x \ \ 2$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 10 numere care au cifra zecilor egală cu 9, deci sunt 10 cazuri favorabile $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{10}{90} = \dfrac{1}{9}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$m_d = \dfrac{a-1}{a^2}$ Dreapta d este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow \dfrac{a-1}{a^2} = 0$, deci $a = 1$	**2p** **3p**
6.	Cum $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{5}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 1 \cdot 1 =$ $= -6 - 1 = -7$	**3p** **2p**
b)	$xA(y) - yA(x) = x\begin{pmatrix} y+2 & y \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} xy + 2x - yx - 2y & xy - yx \\ x - y & -2x + 2y \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2(x-y) & 0 \\ x-y & -2(x-y) \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**

c)	$aA(-1)-(-1)A(a)=(a+1)A(0) \Rightarrow (aA(-1)+A(a))A(0)=(a+1)A(0)A(0)=$ $=4(a+1)I_2$ $4(a+1)=a^2+7 \Leftrightarrow a=1$ sau $a=3$	3p 2p
2.a)	$f=4X^3-6X+2 \Rightarrow f(1)=4\cdot 1^3-6\cdot 1+2=$ $=4-6+2=0$	3p 2p
b)	Restul împărțirii polinomului f la X^2+X+1 este egal cu $-6X+m+4$ Cum pentru orice număr real m restul este nenul, polinomul f **nu** se divide cu X^2+X+1	3p 2p
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{m}{4} \Rightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{m}$ $\left(\frac{6}{m}\right)^2=-\frac{4}{m}$ și, cum m este număr real nenul, obținem $m=-9$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=0-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$ $=-\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,\infty)$	3p 2p
b)	$f(1)=0, f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	2p 3p
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$ $f(x)\ge f(1) \Rightarrow f(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f(\sqrt{x})\ge 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1-\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 0$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (x+1)f(x)dx=\int_0^2(3x^3+3x^2+1)dx=\left(\frac{3x^4}{4}+x^3+x\right)\Big\vert_0^2=$ $=12+8+2=22$	3p 2p
b)	$\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx=\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx=e^{x^3}\Big\vert_0^1=$ $=e-1$	3p 2p
c)	$g(x)=\frac{1}{x+1} \Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{\pi}{x+1}\Big\vert_0^1=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n=2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{12}=0$

5p **2.** Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+2$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{4}+1$. Determinați numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\3 & 2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$.
Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\sqrt{2})>f(\sqrt[3]{3})$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{12}=\sqrt{3}(3-1)-2\sqrt{3}=$ $=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**3p** **2p**
2.	$f(1)=g(1)\Leftrightarrow 1^2+2\cdot 1+3=1+a\Leftrightarrow 6=1+a$ $a=5$	**3p** **2p**
3.	$x+1=1-2\sqrt{x}+x\Rightarrow 2\sqrt{x}=0$ $x=0$, care convine	**3p** **2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**1p** **1p** **3p**
5.	$m_{d_1}=a,\ m_{d_2}=\frac{1}{4}$ Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$	**2p** **3p**
6.	$\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin x\cos x-\sin x(-\cos x)=$ $=2\sin x\cos x=\sin 2x$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(1))=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-3\cdot(-2)=$ $=-6+6=0$	**3p** **2p**
b)	$M(x)-M(2018)=(I_2+xA)-(I_2+2018A)=I_2+xA-I_2-2018A=$ $=(I_2+(-2018)A)-(I_2+(-x)A)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
c)	$(I_2+mA)(I_2+nA)=I_2+mnA\Leftrightarrow I_2+mA+nA+mnA\cdot A=I_2+mnA$ și, cum $A\cdot A=-A$, obținem $m+n-mn=mn$ Cum m și n sunt numere naturale nenule, $m+n=2mn\Rightarrow(m,n)=(1,1)$	**3p** **2p**
2.a)	$x\circ y=8xy+x+y+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=$ $=8x\left(y+\frac{1}{8}\right)+\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**

b)	$8\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{8}=1 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$ $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{4}$	**3p** **2p**
c)	$f(x\circ y)=8(xy+x+y)+1=64xy+8x+8y+1=(8x+1)(8y+1)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y $f(x\circ y\circ z)=f(x\circ y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$ $=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=\frac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(0)=\frac{1}{3},\ f'(0)=\frac{1}{3}$ Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$ $1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\Rightarrow f(\sqrt{2})>f(\sqrt[3]{3})$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^3\frac{xf(x)}{e^x}dx=\int_0^3\frac{x^2e^x}{e^x}dx=\int_0^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^3=$ $=\frac{27}{3}-0=9$	**3p** **2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=xe^x,\ F''(x)=(x+1)e^x,\ x\in\mathbb{R}$ $F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, $F''(-1)=0$ și $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are un singur punct de inflexiune	**2p** **3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^n\|f(x)\|dx=\int_0^n xe^xdx=(x-1)e^x\Big\|_0^n=(n-1)e^n+1$ $(n-1)e^n+1=1\Leftrightarrow n=1$	**3p** **2p**